

Σ_i une surface, paramétrée par $\sigma: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\partial \Sigma_i =$ la partie tranchante de Σ_i

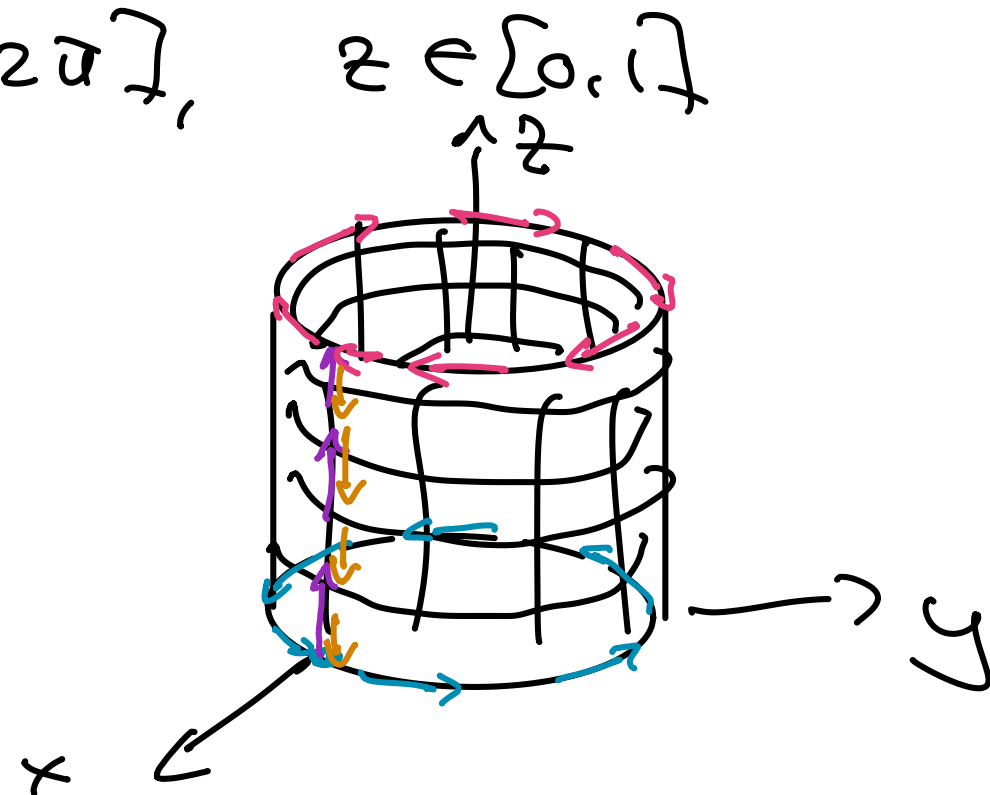
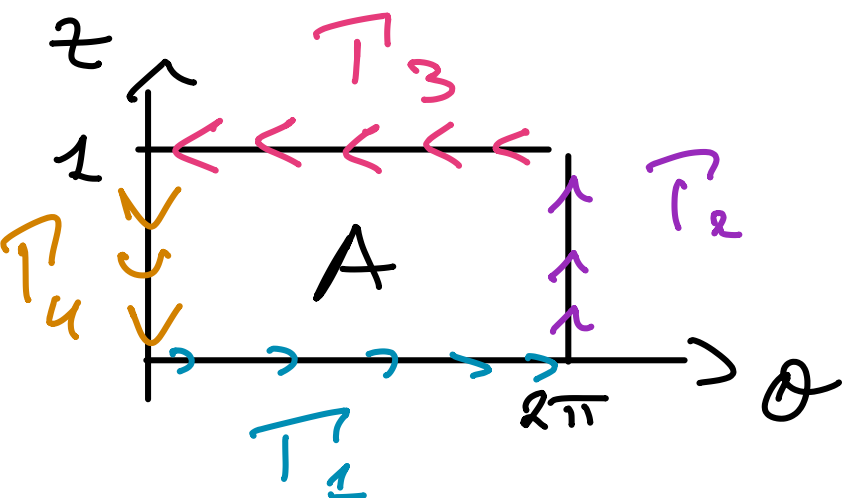
ou

$\partial \Sigma_i = \sigma(\partial A) -$ (les courbes parcourues dans le sens opposés + les points)

Exemples 3.16

$$(i) \Sigma_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1] \}$$

$$\sigma(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, 1]$$



$$\tau_1 : \gamma_1(t) = (t, 0), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\sigma(\gamma_1(t)) = (\cos t, \sin t, 0)$$

$$\tau_2 : \gamma_2(t) = (2\pi, t), \quad t \in [0, 1] \quad \tau_3 : \gamma_3(t) = (2\pi - t, 1), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\sigma(\gamma_3(t)) = (\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t), 1)$$

$$\sigma(\gamma_2(t)) = (1, 0, t)$$

$$\tau_4 : \gamma_4(t) = (0, 1 - t), \quad t \in [0, 1]$$

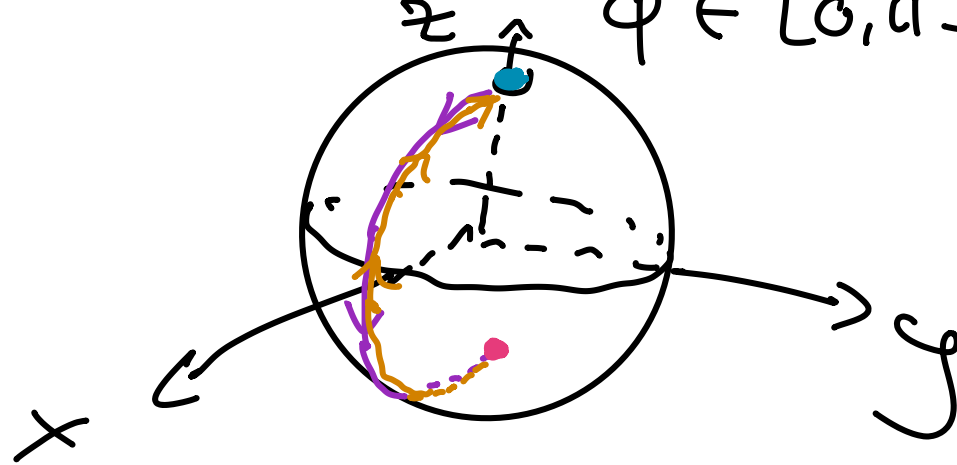
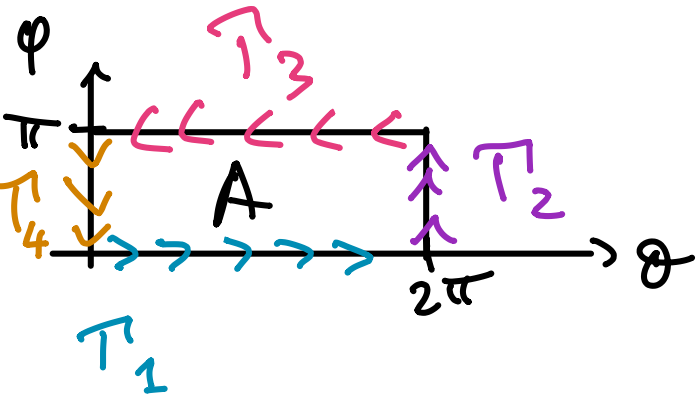
$$\sigma(\gamma_4(t)) = (1, 0, 1 - t)$$

$$\partial \Sigma_1 = \sigma(\tau_4) \cup \sigma(\tau_3)$$

même courbe, dans
des sens opposés !

$$(ii) \Sigma_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \}$$

$$\sigma(\theta, \varphi) = R \cdot (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi) \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ \varphi \in [0, \pi].$$



$$T_1 : \gamma_1(t) = (t, 0), t \in [0, 2\pi]$$

$$\sigma(\gamma_1(t)) = R \cdot (0, 0, 1) \rightarrow \text{est un point au pôle}.$$

$$T_2 : \gamma_2(t) = (2\pi, t), t \in [0, \pi]$$

$$\sigma(\gamma_2(t)) = R (\sin t, 0, \cos t)$$

même
courbe
parcours
dans
des sens
opposés.

$$T_4 : \gamma_4(t) = (0, \pi - t), t \in [0, \pi]$$

$$\sigma(\gamma_4(t)) = R (\sin(\pi - t), 0, \cos(\pi - t))$$

$$T_3 : \gamma_3(t) = (2\pi - t, \pi), t \in [0, 2\pi]$$

$$\sigma(\gamma_3(t)) = R (0, 0, -1) \rightarrow \text{est un point, au pôle}.$$

$$\Rightarrow \partial \Sigma_1 = \emptyset$$

Théorème 3.18 Théorème de Stokes

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert, $\Sigma_1 \subseteq \Omega$ une surface, orientable régulière par morceaux et $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Alors,

$$\iint_{\Sigma_1} \operatorname{rot} F \cdot ds = \int_{\partial \Sigma_1} F \cdot dl.$$

Si Σ_1 ne fait pas partie d'un $\partial \Omega$, la notion de "extérieur" n'a pas ↗ de sens.

Remarque 3.19

(i) Le signe de $\iint_{\Sigma_1} \operatorname{rot} F \cdot ds$ dépend de l'orientation de Σ_1

& le signe de $\int_{\partial \Sigma_1} F \cdot dl$ dépend du sens de parcours de $\partial \Sigma_1$. Comment être sûr de faire des choix compatibles?

Voici un "truc":

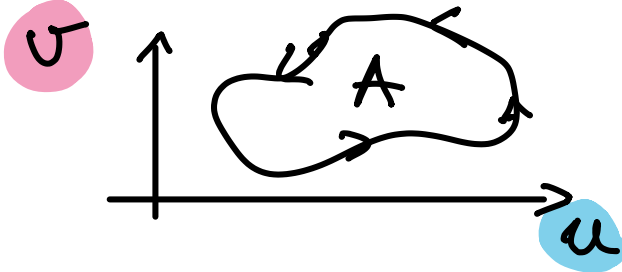
$\sigma: A \rightarrow \Sigma_1$ est une paramétrisation. $\text{FIX} \in \mathbb{R}$ qui est la 1^{ère} variable et qui est la 2^{ème} variable.

par exemple $\sigma(u, v)$

1^{ère} var $\rightarrow$ 2^{ème} variable.

Choix du sens de parcours du $\partial\Sigma$:

choisir pour ∂A l'orientation qui laisse le domaine à gauche. Et pour $\partial\Sigma$ choisir l'orientation induite par σ



Choix de la normale:

Choisir $\sigma_u \wedge \sigma_v$ (par opposition à $\sigma_v \wedge \sigma_u$)

(ii) Funfact: Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ est un domaine régulier,

$$\partial\partial\Omega = \emptyset \Rightarrow \int_{\partial\Omega} \text{rot } F \cdot ds = \int_{\emptyset} F \cdot dl = 0$$

$$0 = \int_{\Omega} \underbrace{\text{div rot } F}_{=0} = \int_{\partial\Omega}$$

Example 3.19

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\} \quad F(x, y, z) = (0, -z^2, 0)$$

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -z^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Choix de coordonnées pour Σ_1 : sphériques.

$$(x, y, z) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = 4 &\Leftrightarrow r = 2 \\ z \geq 0 &\Leftrightarrow \varphi \in [0, \pi/2] \end{aligned}$$

$$\sigma(\theta, \varphi) = (2 \cos \theta \sin \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \varphi) \quad \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi/2]$$

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2\sin\theta\sin\varphi & 2\cos\theta\sin\varphi & 0 \\ 2\cos\theta\cos\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi & -2\sin\varphi \end{vmatrix}$$

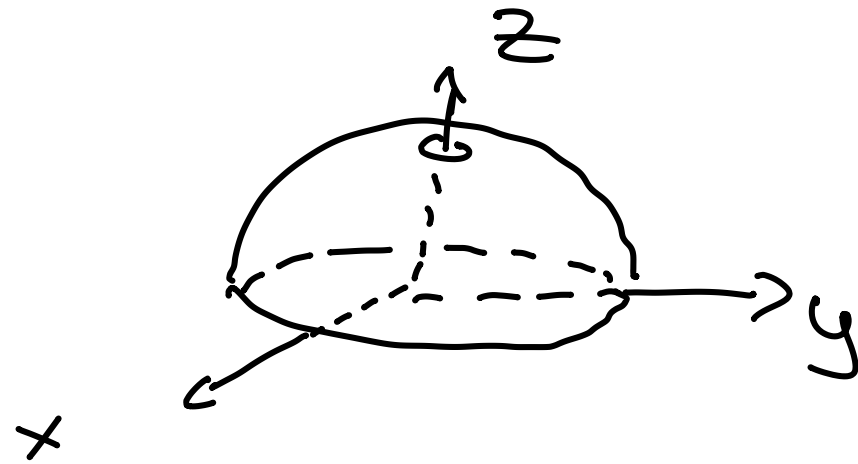
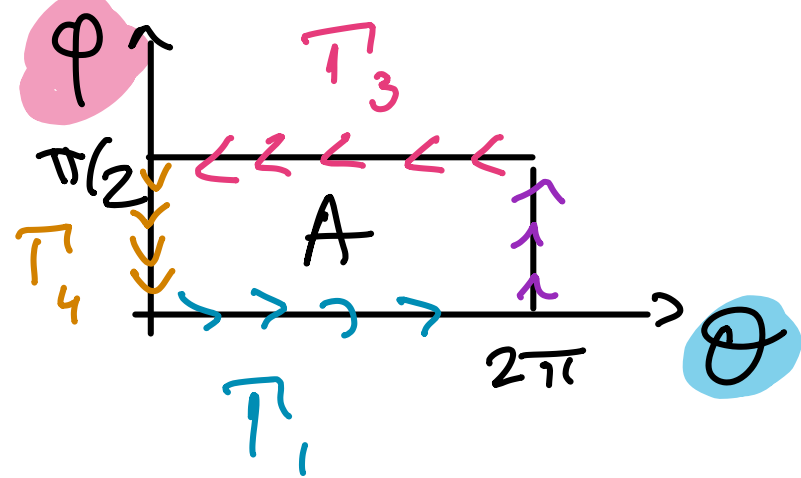
$$= (-4\cos\theta\sin^2\varphi, -4\sin\theta\sin^2\varphi, -4\sin\varphi\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow \sum_i \iint \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \langle (4\cos\varphi, 0, 0), (-4\cos\theta\sin^2\varphi, -4\sin\theta\sin^2\varphi, -4\sin\varphi\cos\varphi) \rangle d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} -16\cos\theta\sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi d\theta$$

$$= -16 \underbrace{\left[\sin\theta \right]_0^{2\pi}}_{=0} \left[\frac{1}{3}\sin^3\varphi \right]_0^{\pi/2} = 0$$

Paramétrisation de $\partial \Sigma$:



$$\gamma_1: \gamma_1(t) = (t, 0), \quad t \in [0, 2\pi] \quad \oplus$$

$$\sigma(\gamma_1(t)) = (0, 0, 2) \rightarrow \text{point, ou ensemble.}$$

$$\gamma_2: \gamma_2(t) = (2\pi, t), \quad t \in [0, \pi/2] \quad \oplus$$

$$\sigma(\gamma_2(t)) = (2\sin t, 0, 2\cos t)$$

$$\gamma_3: \gamma_3(t) = (t, \pi/2), \quad t \in [0, 2\pi] \quad \ominus$$

$$\sigma(\gamma_3(t)) = (2\cos t, 2\sin t, 0)$$

$$\gamma_4: \gamma_4(t) = (0, t), \quad t \in [0, \pi/2] \quad \ominus$$

$$\sigma(\gamma_4(t)) = (2\sin t, 0, 2\cos t)$$

↖ ↗
même courbe parcourues dans
des sens opposés.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\partial \Sigma} F \cdot dl &= - \int_0^{2\pi} \langle F(\sigma(\gamma_3(t))), (\sigma \circ \gamma_3)'(t) \rangle dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \langle (0,0,0), (\sigma \circ \gamma_3)'(t) \rangle dt = 0 \end{aligned}$$

Remarque 3.20 :

Et si on oublie d'enlever des bouts de $\sigma(\partial A)$?

Pas un problème !

Si on a 2x la même courbe parcourue dans 2 sens opposés
($\sigma \circ \gamma_2$ & $\sigma \circ \gamma_4$ dans l'exemple ci-dessus)

$$\int_{\sigma(\gamma_2)} F \cdot dl + \int_{\sigma(\gamma_4)} F \cdot dl = 0$$

Si on a un point ($\sigma \circ \gamma_1$ dans l'exemple ci-dessus) alors
 $(\sigma \circ \gamma_1)'(t) = (0,0,0) \Rightarrow \int_{\sigma(\gamma_1)} F \cdot dl = \int \langle F(\sigma(\gamma_1(t))), (0,0,0) \rangle dt = 0$

Fon de l'analyse vectorielle

- 1) opérateurs diff, calcul d'intégrales dans $\mathbb{R}^2$ & $\mathbb{R}^3$,
intégrales curvilinear et de surface
- 2) Champs qui dérivent d'un potentiel
- 3) théorème de Green & ses corollaires
- 4) théorème de la divergence dans $\mathbb{R}^3$
- 5) théorème de Stokes.

Partie II: Analyse de Fourier

Chapitre 4: Séries de Fourier

§4.1 Motivation, rappels & résultats préliminaires

Taylor: approximer f autour de x_0 , $f \in C^k$.

$$f(x) = \sum_{j=0}^k a_j (x-x_0)^j + o(|x-x_0|^k)$$

$$k \rightarrow \infty, \quad f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)^k.$$

Fourier: approximer f : $f(x+2\pi) = f(x)$

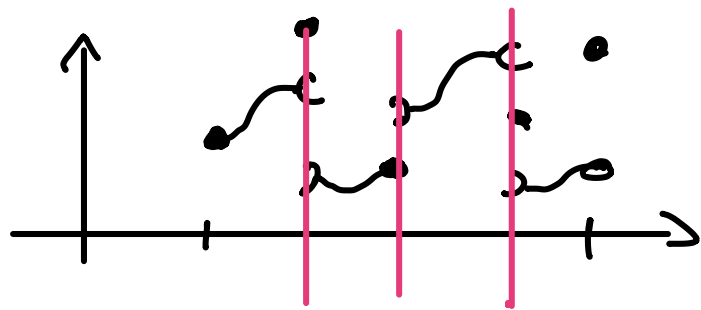
$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (a_k \cdot \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Définition 4.1: Continuité par morceaux, C' par morceaux

Soient $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux et on note $f \in C^0_{\text{morc}}([a, b])$ si

$\exists n \in \mathbb{N}$, $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ tq
 $f \in C^0([a_{i-1}, a_i[)$ pour $i = 1, \dots, n$. et $\lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x) := f(a_i, +0)$
 $\lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x) := f(a_i, -0)$ existent et sont finies.

Si de plus, $f \in C'([a_{i-1}, a_i[)$ et $f'(a_i, +0)$ et $f'(a_i, -0)$ existent et sont finies, on dit que f est C' par morceaux et on note $f \in C'_{\text{morc}}([a, b])$



Proposition 4.2.

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, $T > 0$. Alors,

$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} mx\right) dx = \frac{2}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} mx\right) dx$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } n=m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\& \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T} mx\right) dx = 0$$

preuve: Utiliser $\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b))$

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\sin(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

Remarque 4.3

Rappel d'alg. lin: $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $L = \{e_1, \dots, e_n\}$, $e_i \in V$

si

$$\forall 1 \leq i, j \leq n \quad \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

alors, L est linéairement indépendante.

Si $V = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \cap C_{\text{per}}^1(\mathbb{R}) : f \text{ } 2\pi\text{-périodique}\}$
(esp. vectoriel) est muni du produit scalaire:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx.$$

La proposition 4.2 dit que $L = \{\sin(nx) : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\cos(nx) : n \in \mathbb{N}\}$
est linéairement indépendante.